Analisi Matematica 1, Ing. Gestionale 2023-2024 (787AA)
Appello II

25/01/2024

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 25-01-24

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE A

1. Calcolare la derivata di $f(x) = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$.

   Sol. $f'(x) = \arcsin(x)$.

2. Dire, giustificandolo, se la funzione $f(x) = (\arccos x + \arcsin x)\log(1+x)$ è invertibile su $(0,1)$.

   Sol. Sì, la funzione coincide con $f(x) = \log(1+x)$ che è invertibile poiché iniettiva e suriettiva.

3. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{a}, \quad \underbrace{x^{-x}}_{b}, \quad \underbrace{e^{x^{10}}}_{c}, \quad \underbrace{(\tan(1/x))^{-2}}_{d}.$$

   Sol. $b \ll a \ll d \ll c$.

4. Dire, giustificandolo, se la funzione $f(x) = |x-1|$ è invertibile su $(-2,2)$.

   Sol. No (non iniettiva).

5. Si trovi la soluzione $x(t)$ di $x' - t(1+x)^2\sin(t^2) = 0$ con $x(0) = 0$.

   Sol. $x(t) = \frac{2}{\cos(t^2)+1} - 1$.

6. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione $f(x) = \int_0^x \log(1+y^4)dy$.

   Sol. $f'(x) = \log(1+x^4)$, $f''(x) = \frac{4x^3}{1+x^4}$. Crescente su $\mathbb{R}$, convessa per $x \geq 0$, concava per $x \leq 0$.

7. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+1}{x+2}dx$.

   Sol. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \log|x+2| + c$.

8. Disegnare graficamente le soluzioni di $-|x|+1 \leq y \leq |x|-1$, indicando sul piano cartesiano i valori sulle intersezioni con gli assi.

   Sol.

9. Determinare le soluzioni di $f(x) = 2\cos^2(2x) - 1 \leq 0$ in $[0,\pi]$.

   Sol. $x \in [\pi/8, 3\pi/8]$, $x \in [5\pi/8, 7\pi/8]$.

10. Utilizzando gli opportuni sviluppi di Taylor, si calcoli $\ell = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

    Sol. $\ell = e^{-2/3}$.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 25-01-24

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE B

1. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{a}, \quad \underbrace{\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{-2}}_{b}, \quad \underbrace{1/x^2}_{c}, \quad \underbrace{xe^{x^2}}_{d}.$$

Sol. $c \ll a \ll b \ll d$.

2. Dire, giustificandolo, se la funzione $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ è invertibile su $\mathbb{R}$.

Sol. No (non iniettiva).

3. Si trovi la soluzione $x(t)$ di $x' - t^2(1+x)^2\sin(t^3) = 0$ con $x(0) = 0$.

Sol. $x(t) = \frac{3}{\cos(t^3)+2} - 1$.

4. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{0} \log(1+y^4)dy$.

Sol. $f'(x) = \log(1+x^4)$, $f''(x) = \frac{4x^3}{1+x^4}$. Crescente su $\mathbb{R}$, convessa per $x \geq 0$, concava per $x \leq 0$.

5. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+1}{x+2}dx$.

Sol. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \log|x+2| + c$.

6. Disegnare graficamente le soluzioni di $-|x|+2 \leq y \leq |x|-2$, indicando sul piano cartesiano i valori sulle intersezioni con gli assi.

Sol.

7. Determinare le soluzioni di $f(x) = 2\sin^2(2x) - 1 \leq 0$ in $[0, \pi]$.

Sol. $x \in [0, \pi/8]$, $x \in [3\pi/8, 5\pi/8]$, $x \in [7\pi/8, \pi]$.

8. Utilizzando gli opportuni sviluppi di Taylor, si calcoli $\ell = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$.

Sol. $\ell = e^{-3}$.

9. Calcolare la derivata di $f(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}\right)$.

Sol. $f'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

10. Dire, giustificandolo, se la funzione $f(x) = (\arccos x + \arcsin x)x^3$ è invertibile su $(-1, 1)$.

Sol. Sì, la funzione coincide con $f(x) = x^3$ che è invertibile poiché iniettiva e suriettiva.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 25-01-24

NOME E COGNOME: ____________________ MATRICOLA: ____________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE C

1. Si trovi la soluzione $x(t)$ di $x' - t^3(1+x)^2\sin(t^4) = 0$ con $x(0) = 0$.

   Sol. $x(t) = \frac{4}{\cos(t^4)+3} - 1$.

2. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \log(1+y^4)dy$.

   Sol. $f(x) = 2\int_0^x \log(1+y^4)dy$. Quindi $f'(x) = 2\log(1+x^4)$, $f''(x) = \frac{6x^3}{1+x^4}$. Crescente su $\mathbb{R}$, convessa per $x \geq 0$, concava per $x \leq 0$.

3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 2}{x+1}dx$.

   Sol. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x - 7\log|x+1| + c$.

4. Disegnare graficamente le soluzioni di $-|x| + 3 \leq y \leq |x| - 3$, indicando sul piano cartesiano i valori sulle intersezioni con gli assi.

   Sol.

5. Determinare le soluzioni di $f(x) = 4\cos^2(2x) - 3 \geq 0$ in $[0, \pi]$.

   Sol. $x \in [0, \pi/12]$, $x \in [5\pi/12, 7\pi/12]$, $x \in [11\pi/12, \pi]$.

6. Utilizzando gli opportuni sviluppi di Taylor, si calcoli $\ell = \displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{6}{x^2}}$.

   Sol. $\ell = e^{-1}$.

7. Calcolare la derivata di $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$.

   Sol. $f'(x) = \frac{1}{6\sqrt{x}} \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$.

8. Dire, <u>giustificandolo</u>, se la funzione $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{1+\tan x}$ è limitata sull'intervallo $(-\pi/4, \pi/4)$.

   Sol. No, poiché $\displaystyle\lim_{x\to -\pi/4} f(x) = \infty$.

9. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\log(1+e^x)}_{a},\quad \underbrace{(2x)^x}_{b},\quad \underbrace{e^{-x^4}}_{c},\quad \underbrace{\left(1-\cos\left(1/\sqrt{x}\right)\right)^2}_{d}.$$

   Sol. $c \ll d \ll a \ll b$.

10. Dire, <u>giustificandolo</u>, se la funzione $f(x) = e^{x^6}$ è invertibile su $\mathbb{R}$.

    Sol. No, poiché non iniettiva.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 25-01-24

NOME E COGNOME: ________________________ **MATRICOLA:** ________________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE D

1. Determinare le soluzioni di $f(x) = 3 - 4\sin^2(2x) \leq 0$ in $[0, \pi]$.

   Sol. $x \in [\pi/6, \pi/3]$, $x \in [2\pi/3, 5\pi/6]$.

2. Utilizzando gli opportuni sviluppi di Taylor, si calcoli $\ell = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

   Sol. $\ell = 1$.

3. Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan\left(\frac{\log(x)+1}{\log(x)-1}\right)$.

   Sol. $f'(x) = -\frac{1}{x(\log^2 x+1)}$.

4. Dire, <u>giustificandolo</u>, se la funzione $f(x) = \frac{10}{\log(2-x)}$ è limitata su $(0, 1)$.

   Sol. No, poiché $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$.

5. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\frac{x}{1-\cos(1/x^2)}}_{a}, \quad \underbrace{e^{-x\log 3}}_{b}, \quad \underbrace{10^{-x}}_{c}, \quad \underbrace{(\log(1+1/x))^{-4}}_{d}.$$

   Sol. $c \ll b \ll d \ll a$.

6. Dire, <u>giustificandolo</u>, se la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ è iniettiva su $[-a, a]$, dove a è un numero reale positivo ($a > 0$).

   Sol. No, poiché non iniettiva.

7. Si trovi la soluzione $x(t)$ di $x' - t^4(1+x)^2\sin(t^5) = 0$ con $x(0) = 0$.

   Sol. $x(t) = \frac{5}{\cos(t^5)+4} - 1$.

8. Determinare gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione $f(x) = -\int_{-x}^{x} \log(1+y^4)dy$.

   Sol. $f(x) = -2\int_0^x \log(1+y^4)dy$. Quindi $f'(x) = -2\log(1+x^4)$, $f''(x) = -\frac{6x^3}{1+x^4}$. Decrescente su $\mathbb{R}$, concava per $x \geq 0$, convessa per $x \leq 0$.

9. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 1}{x-1}dx$.

   Sol. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x - \log|x-1| + c$.

10. Disegnare graficamente le soluzioni di $-|x| + 4 \leq y \leq |x| - 4$, indicando sul piano cartesiano i valori sulle intersezioni con gli assi.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 25-01-24

NOME E COGNOME:		MATRICOLA:	

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE I

1. Sia data l'equazione differenziale $x'' - 4x' + 4x = e^{2t} + t$.
   Determinare la soluzione generale di tale equazione.
   Si determinino i coefficienti c_1 e c_2 tali che $x(0) = -\frac{1}{8}$ e $x'(0) = 1$.
   Per i valori di c_1 e c_2 trovati, si scriva lo sviluppo di Taylor con resto di Peano in un intorno di $t = 0$ fino al terzo ordine della soluzione.
   Indicare quale è la parte principale della soluzione per $t \to 0$.

2. Sia data la funzione $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   Determinarne dominio, immagine, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia e convessità. Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Si dica se la funzione è invertibile e in tal caso calcolarne l'inversa.
   Calcolare l'area sottesa al grafico della funzione inversa nell'intervallo $[0, 1]$.

Sol. 1. La soluzione dell'omogenea associata è data da $x_{om}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$, utilizzando il fatto che il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ ha due radici reali coincidenti, ovvero $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Queste ultime coincidono con $m = 2$ di e^{mt}, che è il primo termine non omogeneo. Quindi una soluzione particolare della non omogenea va cercata della forma $\tilde{x} = at^2 e^{2t} + q(t)$, dove $q(t) = bt + c$. Si ricava che $c = 1/4, b = 1/4, a = 1/2$. Quindi la soluzione generale è data da $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{t^2}{2} e^{2t} + \frac{t}{4} + \frac{1}{4}$. Risolviamo le equazioni

$$-\frac{1}{8} = x(0) = c_1 + \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad 1 = x'(0) = 2c_1 + c_2 + \frac{1}{4}$$

quindi $c_1 = -3/8$ e $c_2 = \frac{3}{2}$. Lo sviluppo di Taylor è $x(t) = -\frac{1}{8} + t + \frac{11t^2}{4} + \frac{7t^3}{2} + o(t^3)$. La parte principale è $-1/8$.

Sol. 2. $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, è dispari, tende a $+\infty$ per $x \to \infty$ e a $-\infty$ se $x \to -\infty$. Funzione illimitata, quindi $\sup f = \infty$ e $\inf f = -\infty$. $Im(f) = \mathbb{R}$. $f(0) = 0$ e $\inf f = 0$. La derivata è $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, quindi $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero sempre strettamente crescente. Per gli intervalli di convessità studiamo la derivata seconda. $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, quindi $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. La funzione è quindi concava in $(-\infty, 0)$ e convessa in $(0, +\infty)$.
La funzione è iniettiva e suriettiva, quindi invertibile, con inversa $x = g(y)$ che si ottiene come segue.

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x},$$

quindi, posto $z = e^x$, otteniamo $z^2 - 2zy - 1 = 0$ da cui si ricava $z = y + \sqrt{1 + y^2}$. Ricordando la definizione di z si ha che $x = \log(y + \sqrt{1 + y^2}) = g(y)$. Per l'area bisogna calcolare la primitiva di g. Per parti si ha che

$$\begin{aligned}
\int g(y)dy &= y \log(y + \sqrt{1 + y^2}) - \int \frac{y\sqrt{1 + y^2} + y^2}{y\sqrt{1 + y^2} + 1 + y^2} dy \\
&= y \log(y + \sqrt{1 + y^2}) - \int \frac{y\sqrt{1 + y^2} + y^2}{y\sqrt{1 + y^2} + 1 + y^2} \frac{1 + y^2 - y\sqrt{1 + y^2}}{1 + y^2 - y\sqrt{1 + y^2}} dy \\
&= y \log(y + \sqrt{1 + y^2}) - \int \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} dy = y \log(y + \sqrt{1 + y^2}) - \sqrt{1 + y^2}.
\end{aligned}$$

In conclusione si ha che $\int_0^1 g(y)dy = \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 2, 25-01-24

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE II

1. Sia data la funzione $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
   Determinarne dominio, immagine, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia e convessità. Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Si dica se la funzione è invertibile e in tal caso calcolarne l'inversa.
   Calcolare l'area sottesa al grafico della funzione inversa nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Sia data l'equazione differenziale $x'' - 6x' + 9x = e^{3t} + t$.
   Determinare la soluzione generale di tale equazione.
   Si determinino i coefficienti c_1 e c_2 tali che $x(0) = \frac{1}{9}$ e $x'(0) = 0$.
   Per i valori di c_1 e c_2 trovati, si scriva lo sviluppo di Taylor con resto di Peano in un intorno di $t = 0$ fino al terzo ordine della soluzione.
   Indicare quale è la parte principale della soluzione per $t \to 0$.

Sol. 1. $f(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, è pari, tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Quindi funzione illimitata superiormente, ovvero $\sup f = \infty$. $f(0) = 1$. La derivata è $f'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, quindi $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$, e $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \leq 0$, ovvero crescente su $\mathbb{R}^+$ e decrescente su $\mathbb{R}^-$. Il punto $x = 0$ è un punto di minimo globale. Per gli intervalli di convessità studiamo la derivata seconda. $f''(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, quindi $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi è convessa.
L'immagine di $f(x)$ è $[1, \infty)$. La funzione con codominio l'immagine di f e ristretta a $x \geq 0$, ovvero $f : \mathbb{R}^+ \mapsto [1, \infty)$, è iniettiva e suriettiva, quindi invertibile, con inversa $x = g(y)$ che si ottiene come segue. Osserviamo anche che $g : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}^+$.

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x},$$

quindi, posto $z = e^x$, otteniamo $z^2 - 2zy + 1 = 0$ da cui si ricava $z = y + \sqrt{y^2 - 1}$. Ricordando la definizione di z si ha che $x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) = g(y)$. Per l'area bisogna calcolare la primitiva di g. Per parti si ha che

$$\begin{aligned}
\int g(y)dy &= y \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) - \int \frac{y\sqrt{y^2 - 1} + y^2}{y\sqrt{y^2 - 1} + y^2 - 1} dy \\
&= y \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) - \int \frac{y\sqrt{y^2 - 1} + y^2}{y\sqrt{y^2 - 1} + y^2 - 1} \frac{y^2 - 1 - y\sqrt{y^2 - 1}}{y^2 - 1 - y\sqrt{1 + y^2}} dy \\
&= y \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) - \int \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} dy = y \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) - \sqrt{y^2 - 1}.
\end{aligned}$$

In conclusione si ha che $\int_1^2 g(y)dy = 2\log(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}$.

Sol. 2. La soluzione dell'omogenea associata è data da $x_{om}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$, utilizzando il fatto che il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ ha due radici reali coincidenti, ovvero $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Queste ultime coincidono con $m = 3$ di e^{mt}, che è il primo termine non omogeneo. quindi una soluzione particolare della non omogenea va cercata della forma $\tilde{x} = at^2 e^{3t} + q(t)$, dove $q(t) = bt + c$. Si ricava che $c = 2/27, b = 1/9, a = 1/2$. Quindi la soluzione generale è data da $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \frac{t^2}{2} e^{3t} + \frac{t}{9} + \frac{2}{27}$. Risolviamo le equazioni

$$\frac{1}{9} = x(0) = c_1 + \frac{2}{27} \quad \text{e} \quad 0 = x'(0) = c_2 + \frac{2}{9}$$

quindi $c_1 = \frac{1}{27}$ e $c_2 = -\frac{2}{9}$. Lo sviluppo di Taylor è $x(t) = \frac{1}{9} + \frac{2t^3}{3} + o(t^3)$. La parte principale è $1/9$.